

Arbres en boîtes et hyperarbres décorés

Bérénice Delcroix-Oger (ICJ-Lyon)

Séminaire du LIX

Mercredi 4 juin 2014

Sommaire

1 Des espèces aux hyperarbres décorés

- Qu'est-ce qu'une espèce ?
- Les espèces d'hyperarbres
- Hyperarbres décorés

2 Lien avec les arbres en boîtes

- Arbres en boîtes
- Compter les hyperarbres décorés avec les arbres en boîtes

Introduction

- Hyperarbres définis par C. Berge dans les années 1980
- Poset sur les hyperarbres utilisé par C. Jensen, J. McCammond et J. Meier dans les années 2000 pour l'étude d'un sous-groupe du groupe des automorphismes du groupe libre
- Action du groupe symétrique sur l'homologie du poset des hyperarbres étudiée par F. Chapoton et B.O.



Les formules obtenues font intervenir des hyperarbres décorés.

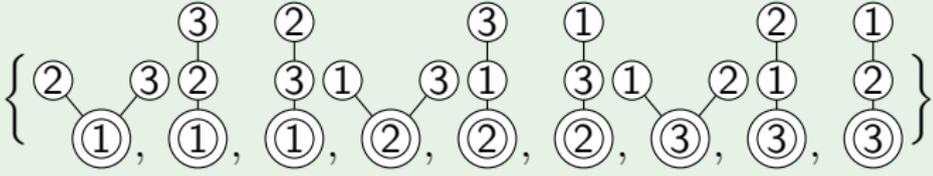
But :

Compter ces hyperarbres décorés

Qu'est-ce qu'une espèce ?

Exemples d'espèces

- $\{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}$ (espèce des listes sur $\{1, 2, 3\}$)
- $\{\{1, 2, 3\}\}$ (espèce des ensembles non vides Comm)
- $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ (espèce des ensembles pointés)

-  (espèce des arbres enracinés PreLie)

Les ensembles ci-dessus sont des images par des espèces de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$.

Chêne, pommier, . . . , et autres espèces d'arbres

Définition

Une espèce F est un foncteur de la catégorie des ensembles finis et bijections dans elle-même. A un ensemble fini I , l'espèce F associe un ensemble fini $F(I)$ indépendant de la nature de I .

Chêne, pommier, . . . , et autres espèces d'arbres

Définition

Une espèce F est un foncteur de la catégorie des ensembles finis et bijections dans elle-même. A un ensemble fini I , l'espèce F associe un ensemble fini $F(I)$ indépendant de la nature de I .

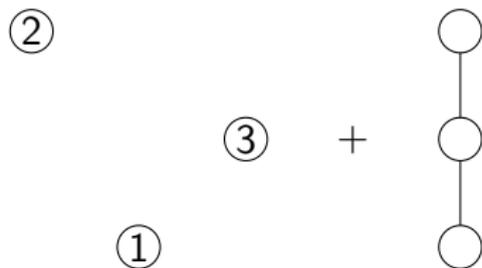
Espèce = plan de construction, avec invariance de l'ensemble d'arrivée par ré-étiquetage

Chêne, pommier, . . . , et autres espèces d'arbres

Définition

Une espèce F est un foncteur de la catégorie des ensembles finis et bijections dans elle-même. A un ensemble fini I , l'espèce F associe un ensemble fini $F(I)$ indépendant de la nature de I .

Espèce = plan de construction, avec invariance de l'ensemble d'arrivée par ré-étiquetage

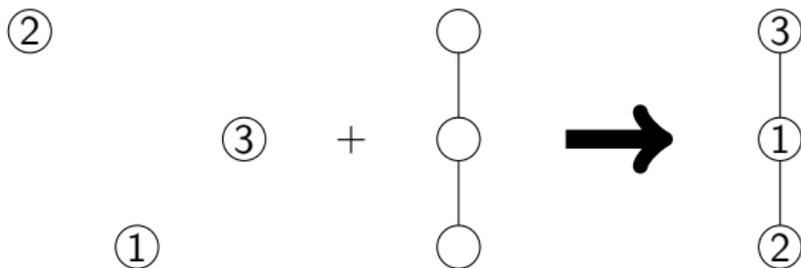


Chêne, pommier, . . . , et autres espèces d'arbres

Définition

Une espèce F est un foncteur de la catégorie des ensembles finis et bijections dans elle-même. A un ensemble fini I , l'espèce F associe un ensemble fini $F(I)$ indépendant de la nature de I .

Espèce = plan de construction, avec invariance de l'ensemble d'arrivée par ré-étiquetage



Chêne, pommier, . . . , et autres espèces d'arbres

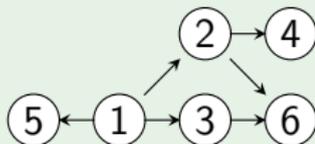
Définition

Une espèce F est un foncteur de la catégorie des ensembles finis et bijections dans elle-même. A un ensemble fini I , l'espèce F associe un ensemble fini $F(I)$ indépendant de la nature de I .

Contre-exemples

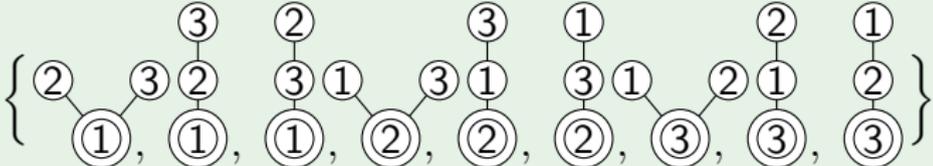
Les ensembles ci-dessous ne sont **pas** les images d'un ensemble par une espèce :

- $\{(1, \mathbf{3}, 2), (2, 1, \mathbf{3}), (2, \mathbf{3}, 1), (3, 1, \mathbf{2})\}$ (ensemble des permutations de $\{1, 2, 3\}$ avec exactement 1 élément plus grand que l'élément précédent)
- (graphe de divisibilité de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)



Exemples

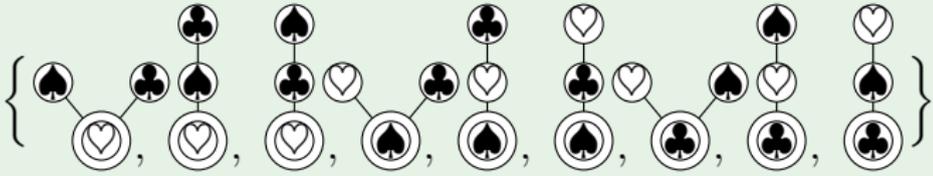
- $\{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}$ (espèce des listes \mathbb{L})
- $\{\{1, 2, 3\}\}$ (espèce des ensembles \mathbb{E})
- $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ (espèce des ensembles pointés \mathbb{P})

-  (espèce des arbres enracinés \mathbb{A})

Les ensembles ci-dessus sont des images par des espèces de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$.

Exemples

- $\{(\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit), (\heartsuit, \clubsuit, \spadesuit), (\spadesuit, \heartsuit, \clubsuit), (\spadesuit, \clubsuit, \heartsuit), (\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit), (\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit)\}$
(espèce des listes \mathbb{L})
- $\{\{\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}\}$ (espèce des ensembles \mathbb{E})
- $\{\{\heartsuit\}, \{\spadesuit\}, \{\clubsuit\}\}$ (espèce des ensembles pointés \mathbb{P})

-  (espèce des arbres enracinés \mathbb{A})

Les ensembles ci-dessus sont des images par des espèces de l'ensemble $\{\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$.

Définition

À une espèce F , on associe sa *série génératrice* :

$$C_F(x) = \sum_{n \geq 0} \#F(\{1, \dots, n\}) \frac{x^n}{n!}.$$

Définition

À une espèce F , on associe sa *série génératrice* :

$$C_F(x) = \sum_{n \geq 0} \#F(\{1, \dots, n\}) \frac{x^n}{n!}.$$

Exemples de séries génératrices :

- La série génératrice de l'espèce des listes est $C_{\mathbb{L}} = \frac{1}{1-x}$.
- La série génératrice de l'espèce des ensembles est $C_{\mathbb{E}} = \exp(x)$.
- La série génératrice de l'espèce des ensembles pointés est $C_{\mathbb{P}} = x \cdot \exp(x)$.
- La série génératrice de l'espèce des arbres enracinés est $C_{\mathbb{A}} = \sum_{n \geq 0} n^{n-1} \frac{x^n}{n!}$.

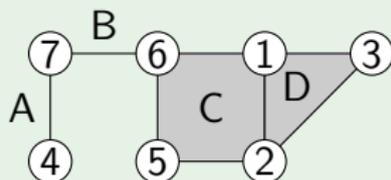
Hypergraphes et hyperarbres

Définition

Un *hypergraphe* (sur un ensemble V) est un couple (V, E) où :

- V est un ensemble fini, (sommets)
- E est un sous-ensemble de l'ensemble des parties de V , $\mathcal{P}(V)$. (arêtes)

Exemple d'hypergraphe sur $[1; 7]$



Marche sur un hypergraphe

Définition

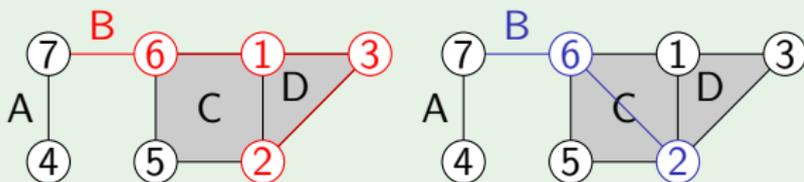
Soit $H = (V, E)$ un hypergraphe.

Une *marche* d'un sommet ou d'une arête d vers un sommet ou une arête f de H est une suite alternée de sommets et d'arêtes, commençant par d et terminant par f :

$$(d, \dots, e_i, v_i, e_{i+1}, \dots, f)$$

où pour tout i , $v_i \in V$, $e_i \in E$ et $\{v_i, v_{i+1}\} \subseteq e_i$. La longueur de la marche est le nombre de sommets et d'arêtes de la marche.

Exemples de marches



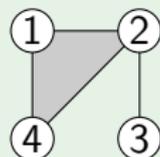
Hyperarbres

Définition

Un *hyperarbre* est un hypergraphe non trivial H tel que, pour toute paire de sommets distincts v et w de H ,

- il existe une marche de v à w dans H avec des arêtes disjointes e_i (H est connexe),
- cette marche est unique (H n'a pas de cycles).

Exemple d'un hyperarbre



Hyperarbres enracinés

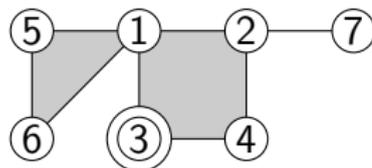
Définition

Un hyperarbre *enraciné* est un hyperarbre avec *un sommet distingué (racine)*.

Hyperarbres enracinés

Définition

Un hyperarbre *enraciné* est un hyperarbre avec *un sommet distingué (racine)*.



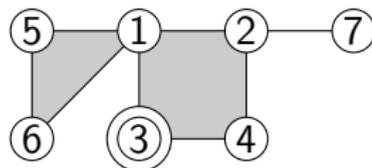
Hyperarbres enracinés

Définition

Un hyperarbre *enraciné* est un hyperarbre avec *un sommet distingué (racine)*.

Définition

Un hyperarbre *creux* sur I est un hyperarbre sur l'ensemble $\{\#\} \cup I$, tel que le sommet étiqueté $\#$, appelé "creux", n'appartienne qu'à une et une seule arête.



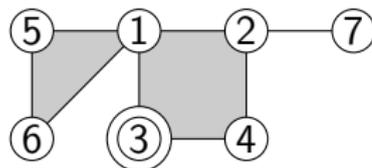
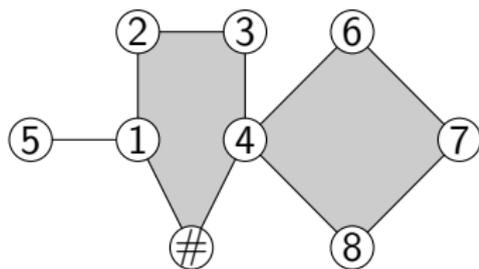
Hyperarbres enracinés

Définition

Un hyperarbre *enraciné* est un hyperarbre avec *un sommet distingué (racine)*.

Définition

Un hyperarbre *creux* sur I est un hyperarbre sur l'ensemble $\{\#\} \cup I$, tel que le sommet étiqueté $\#$, appelé "creux", n'appartienne qu'à une et une seule arête.



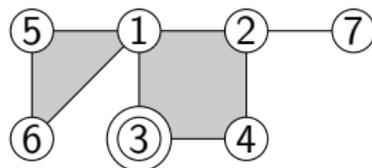
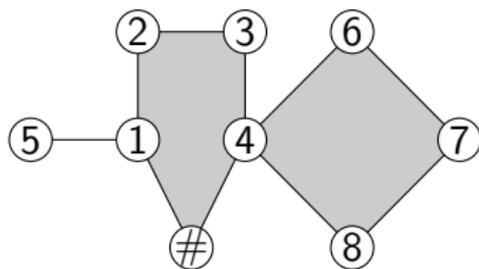
Hyperarbres enracinés

Définition

Un hyperarbre *enraciné* est un hyperarbre avec *un sommet distingué (racine)*.

Définition

Un hyperarbre *creux* sur I est un hyperarbre sur l'ensemble $\{\#\} \cup I$, tel que le sommet étiqueté $\#$, appelé "creux", n'appartienne qu'à une et une seule arête.



Hyperarbres décorés

Définition

Etant donnée une espèce \mathcal{S} , un *hyperarbre décoré* (éventuellement enraciné ou creux) est obtenu à partir d'un hyperarbre H (éventuellement enraciné ou creux) en choisissant pour chaque arête e de H un élément de $\mathcal{S}(V_e)$, où V_e est l'ensemble des sommets de l'arête e .

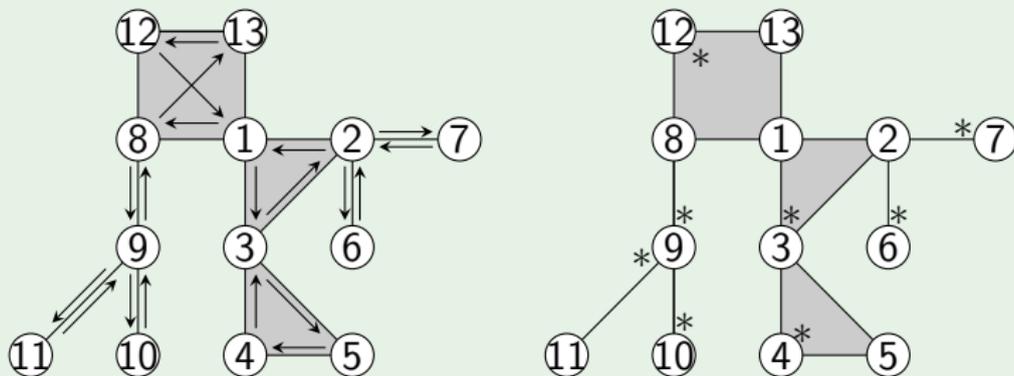
Hyperarbres décorés

Définition

Etant donnée une espèce \mathcal{S} , un *hyperarbre décoré* (éventuellement enraciné ou creux) est obtenu à partir d'un hyperarbre H (éventuellement enraciné ou creux) en choisissant pour chaque arête e de H un élément de $\mathcal{S}(V_e)$, où V_e est l'ensemble des sommets de l'arête e .

Deux décorations différentes du même hyperarbre H :

par l'espèce des cycles et par l'espèce des ensembles pointés.



Définition alternative pour la décoration des hyperarbres enracinés et creux

Pétiole = sommet par lequel l'arête est attachée à la racine

Proposition

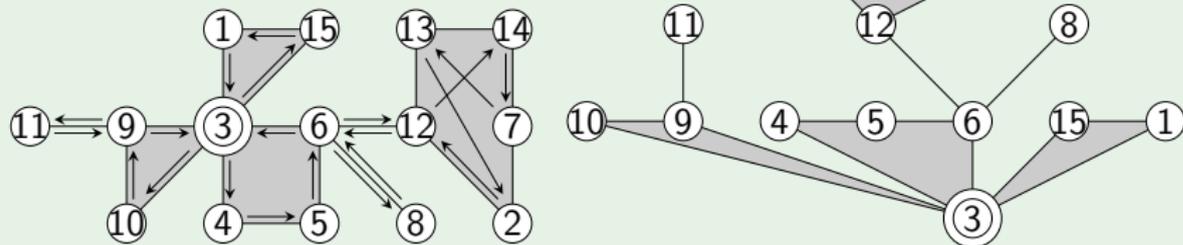
*Si H enraciné ou creux,
décoration de H par une espèce S*

\Leftrightarrow

choix pour chaque arête e d'un élément de l'ensemble $S' (V_e^I)$,

*où l'ensemble V_e^I est l'ensemble des sommets de e distincts de la pétiole,
de la racine ou du creux.*

Décoration d'un hyperarbre enraciné par l'espèce des cycles



1 Des espèces aux hyperarbres décorés

- Qu'est-ce qu'une espèce ?
- Les espèces d'hyperarbres
- Hyperarbres décorés

2 Lien avec les arbres en boîtes

- Arbres en boîtes
- Compter les hyperarbres décorés avec les arbres en boîtes

Qu'est-ce qu'un arbre en boîte ?

Considérons le quadruplet (L, V, R, E) , où

- L est un ensemble fini d'éléments appelés **étiquettes**,

Qu'est-ce qu'un arbre en boîte ?

Considérons le quadruplet (L, V, R, E) , où

- L est un ensemble fini d'éléments appelés **étiquettes**,
- V est une partition de L dont les éléments sont appelés **sommets**,

Qu'est-ce qu'un arbre en boîte ?

Considérons le quadruplet (L, V, R, E) , où

- L est un ensemble fini d'éléments appelés **étiquettes**,
- V est une partition de L dont les éléments sont appelés **sommets**,
- R est un élément de V appelé **racine**,

Qu'est-ce qu'un arbre en boîte ?

Considérons le quadruplet (L, V, R, E) , où

- L est un ensemble fini d'éléments appelés **étiquettes**,
- V est une partition de L dont les éléments sont appelés **sommets**,
- R est un élément de V appelé **racine**,
- E est une application de $V - \{R\}$ dans L appelé l'ensemble des **arêtes**.

Qu'est-ce qu'un arbre en boîte ?

Considérons le quadruplet (L, V, R, E) , où

- L est un ensemble fini d'éléments appelés **étiquettes**,
- V est une partition de L dont les éléments sont appelés **sommets**,
- R est un élément de V appelé **racine**,
- E est une application de $V - \{R\}$ dans L appelé l'ensemble des **arêtes**.

On note \tilde{E} , l'application de $V - \{R\}$ dans V qui associe à un sommet v le sommet v' contenant l'étiquette $E(v)$. Le couple (V, \tilde{E}) forme alors un graphe orienté dont les sommets sont étiquetés par des sous-ensembles de L .

Qu'est-ce qu'un arbre en boîte ?

Considérons le quadruplet (L, V, R, E) , où

- L est un ensemble fini d'éléments appelés **étiquettes**,
- V est une partition de L dont les éléments sont appelés **sommets**,
- R est un élément de V appelé **racine**,
- E est une application de $V - \{R\}$ dans L appelé l'ensemble des **arêtes**.

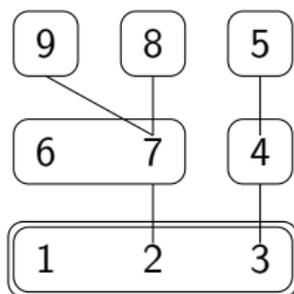
On note \tilde{E} , l'application de $V - \{R\}$ dans V qui associe à un sommet v le sommet v' contenant l'étiquette $E(v)$. Le couple (V, \tilde{E}) forme alors un graphe orienté dont les sommets sont étiquetés par des sous-ensembles de L .

Définition

*Le quadruplet (L, V, R, E) est un **arbre en boîte** si et seulement si le graphe (V, \tilde{E}) est un arbre, enraciné en R , dont les arêtes sont orientés vers la racine.*

L'étiquette l est le parent d'un sommet v si $E(v) = l$.

Un arbre en boîte

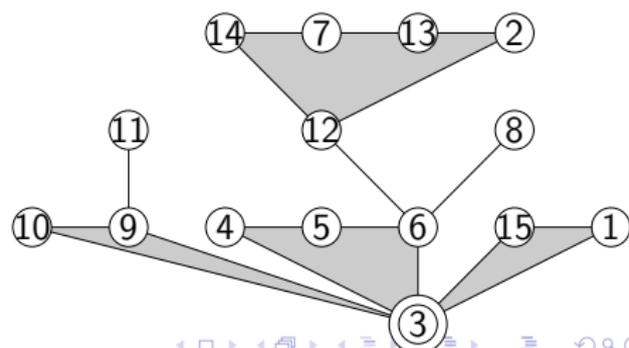
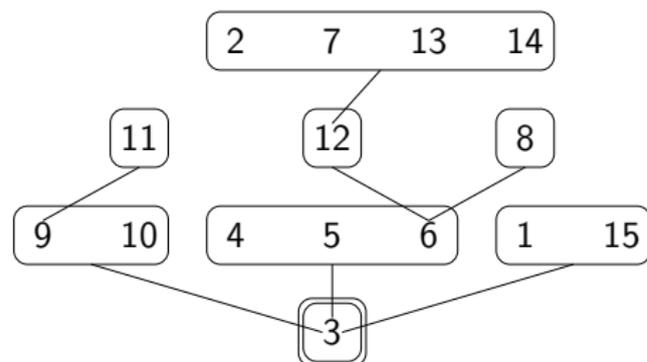


Lien entre hyperarbres enracinés décorés et arbres en boîtes

Proposition

Soit \mathcal{S} une espèce, tout hyperarbre enraciné décoré par \mathcal{S} , sur k arêtes et n sommets, peut se décomposer en un triplet (r, \mathbb{S}, BT) où :

- r est la racine de l'hyperarbre,
- \mathbb{S} est un ensemble de k ensembles décorés par \mathcal{S}' sur $n - 1$ sommets,
- et BT est un arbre en boîtes sur $k + 1$ sommets avec une racine étiquetée par r et les autres sommets étiquetés par les ensembles de \mathbb{S}

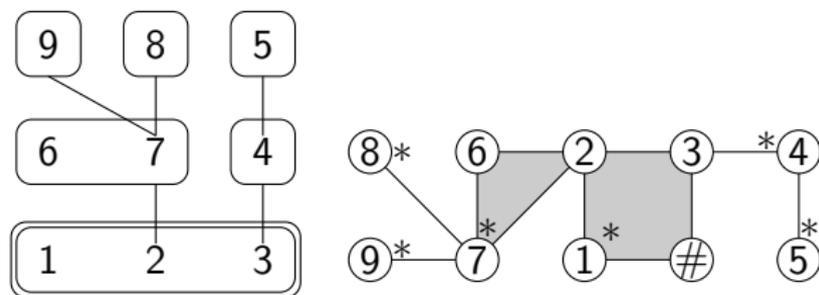


Lien entre hyperarbres creux décorés et arbres en boîtes

Proposition

Etant donnée une espèce \mathcal{S} , tout hyperarbre creux décoré par \mathcal{S} sur k arêtes et n sommets, peut se décomposer en un couple (\mathbb{S}, BT) où :

- \mathbb{S} est un ensemble de k ensembles \mathcal{S}' -décorés sur n sommets,
- et BT est un arbre en boîtes sur k sommets dont les sommets sont étiquetés par les ensembles de \mathbb{S}



Comptons les arbres en boîtes

Proposition

Soit L un ensemble fini de cardinal n et V une partition de L en $k + 1$ parts p_0, p_1, \dots, p_k . Le nombre d'arbre en boîte qui a pour ensemble d'étiquettes L et pour ensemble de sommets V , est :

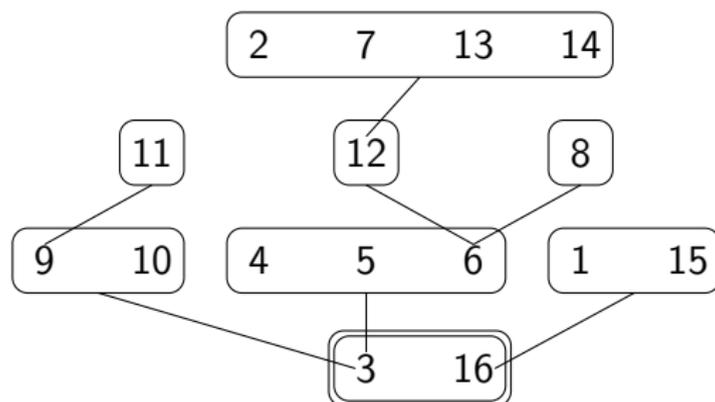
$$N_{L,V,p_0} = \#p_0 \times n^{k-1}.$$

Démonstration.

- 1 Par récurrence
- 2 Code de Prüfer



Code de Prüfer

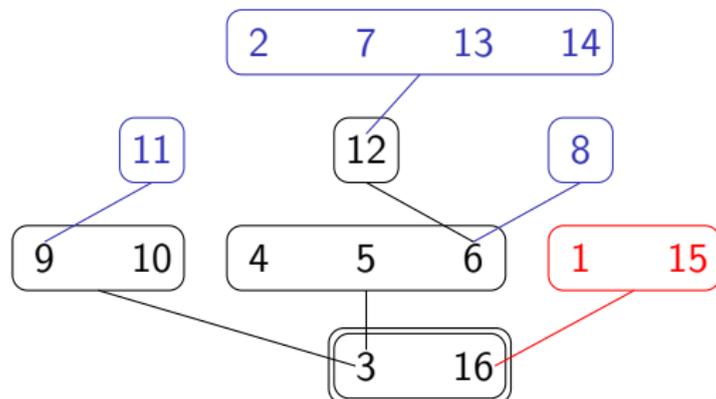


La partition associée est :

$\{1, 15\}, \{2, 7, 13, 14\}, \{3, 16\}, \{4, 5, 6\}, \{8\}, \{9, 10\}, \{11\}, \{12\}$

Le code de Prüfer associé est :

Code de Prüfer

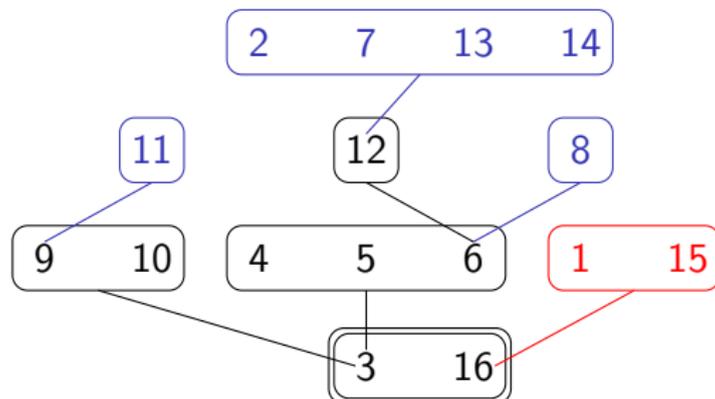


La partition associée est :

$\{1, 15\}, \{2, 7, 13, 14\}, \{3, 16\}, \{4, 5, 6\}, \{8\}, \{9, 10\}, \{11\}, \{12\}$

Le code de Prüfer associé est :

Code de Prüfer



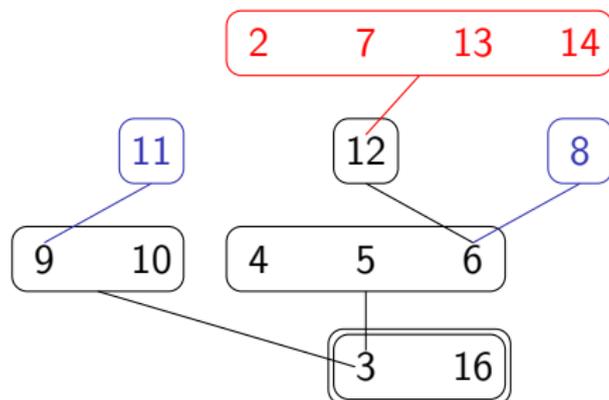
La partition associée est :

$\{1, 15\}, \{2, 7, 13, 14\}, \{3, 16\}, \{4, 5, 6\}, \{8\}, \{9, 10\}, \{11\}, \{12\}$

Le code de Prüfer associé est :

16

Code de Prüfer



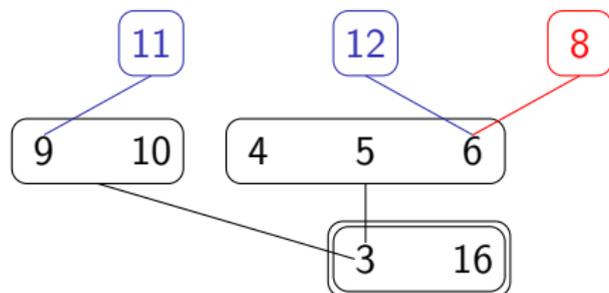
La partition associée est :

$\{1, 15\}, \{2, 7, 13, 14\}, \{3, 16\}, \{4, 5, 6\}, \{8\}, \{9, 10\}, \{11\}, \{12\}$

Le code de Prüfer associé est :

16, 12

Code de Prüfer



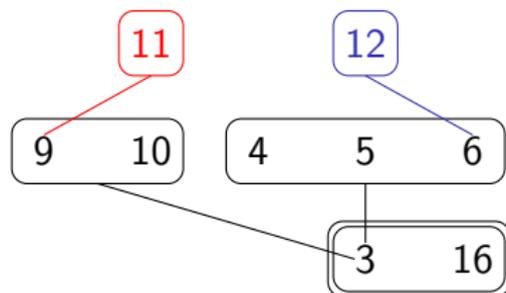
La partition associée est :

$\{1, 15\}, \{2, 7, 13, 14\}, \{3, 16\}, \{4, 5, 6\}, \{8\}, \{9, 10\}, \{11\}, \{12\}$

Le code de Prüfer associé est :

16, 12, 6

Code de Prüfer



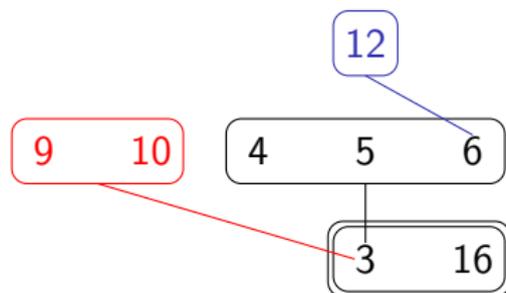
La partition associée est :

$\{1, 15\}, \{2, 7, 13, 14\}, \{3, 16\}, \{4, 5, 6\}, \{8\}, \{9, 10\}, \{11\}, \{12\}$

Le code de Prüfer associé est :

16, 12, 6, **9**

Code de Prüfer



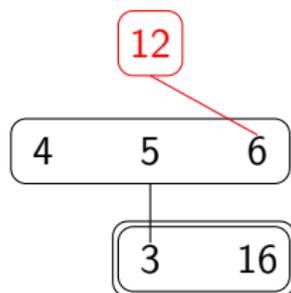
La partition associée est :

$\{1, 15\}, \{2, 7, 13, 14\}, \{3, 16\}, \{4, 5, 6\}, \{8\}, \{9, 10\}, \{11\}, \{12\}$

Le code de Prüfer associé est :

16, 12, 6, 9, 3

Code de Prüfer



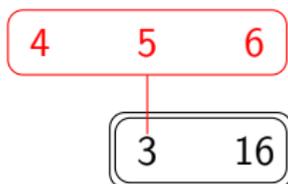
La partition associée est :

$\{1, 15\}, \{2, 7, 13, 14\}, \{3, 16\}, \{4, 5, 6\}, \{8\}, \{9, 10\}, \{11\}, \{12\}$

Le code de Prüfer associé est :

16, 12, 6, 9, 3, **6**

Code de Prüfer



La partition associée est :

$\{1, 15\}, \{2, 7, 13, 14\}, \{3, 16\}, \{4, 5, 6\}, \{8\}, \{9, 10\}, \{11\}, \{12\}$

Le code de Prüfer associé est :

16, 12, 6, 9, 3, 6, **3**

Proposition

Soit L un ensemble fini de cardinal n et V une partition de L en $k + 1$ parts p_0, p_1, \dots, p_k . Le nombre d'arbre en boîte qui a pour ensemble d'étiquettes L et pour ensemble de sommets V , est :

$$N_{L,V,p_0} = \#p_0 \times n^{k-1}.$$

La partition associée est :

$\{1, 15\}, \{2, 7, 13, 14\}, \{\mathbf{3, 16}\}, \{4, 5, 6\}, \{8\}, \{9, 10\}, \{11\}, \{12\}$

$$\Rightarrow k + 1 = 8 \text{ parts}$$

Le code de Prüfer associé est :

$16, 12, 6, 9, 3, 6, \mathbf{3}$

Nombres d'hyperarbres décorés

Théorème

Soit \mathcal{S} une espèce, les séries génératrices des espèces d'hyperarbres décorés, enracinés décorés et creux décorés s'expriment :

$$S_{\mathcal{S}}^p(x) = x + \sum_{n \geq 2} \sum_{k=1}^{n-1} E_{\mathcal{S}}(k, n-1) n^k \frac{x^n}{n!}, \quad (1)$$

$$S_{\mathcal{S}}^c(x) = \sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^n E_{\mathcal{S}}(k, n) n^{k-1} \frac{x^n}{n!} \quad (2)$$

et

$$S_{\mathcal{S}}(x) = x + \sum_{n \geq 2} \sum_{k=1}^{n-1} E_{\mathcal{S}}(k, n-1) n^{k-1} \frac{x^n}{n!}, \quad (3)$$

où $E_{\mathcal{S}}(k, n)$ est le nombre d'ensembles de k ensembles \mathcal{S}' -décorés sur n sommets.

Exemple 1

- Soit \mathbb{L}^+ l'espèce des listes non vides. Le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal n en k listes est $\binom{n-1}{k-1} \frac{n!}{k!}$. Les séries génératrices des hyperarbres enracinés et creux décorés par \mathbb{L}^+ sont alors :

$$S_S^p(x) = x + \sum_{n \geq 2} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} \frac{(n-1)!}{k!} n^k \frac{x^n}{n!}$$

et

$$S_S^c(x) = \sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \frac{n!}{k!} n^{k-1} \frac{x^n}{n!}.$$

Exemple 2

- Soit \mathbb{P}^+ l'espèce des ensembles pointés non vides. Le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal n en k ensembles pointés est $\binom{n}{k} k^n$. Les séries génératrices des hyperarbres enracinés et creux décorés par \mathbb{P}^+ sont alors :

$$S_S^p(x) = x + \sum_{n \geq 2} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} k^{n-1-k} n^k \frac{x^n}{n!}$$

et

$$S_S^c(x) = \sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k^{n-k} n^{k-1} \frac{x^n}{n!}.$$

Exemple 3

- Soit \mathbb{A}^+ l'espèce des arbres enracinés non vides. Le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal n en k arbres est $\binom{n}{k} k \times n^{n-1-k}$. Les séries génératrices des hyperarbres enracinés et creux décorés par \mathbb{A}^+ sont alors :

$$S_S^p(x) = \frac{x}{t} + \sum_{n \geq 2} n (tn + n - 1)^{n-2} \frac{x^n}{n!}$$

et

$$S_S^c(x) = \sum_{n \geq 1} (tn + n)^{n-1} \frac{x^n}{n!}.$$

Merci de votre attention !

[1] Bérénice Oger *Decorated hypertrees*. *Journal of Combinatorial Theory A*, juillet 2013.